به نام خداوند بخشندهٔ مهربان

ریاضیات نهم

تهیه و تنظیم : استاد گودرزی

اعداد گویا

عددی که بتوان آن را به صورت یک کسر متعارفی نوشت عددی گویاست .

$$\left\{\frac{a}{b}\middle| a,b\in\mathbb{Z}\,,\,b\neq ۰\right\}$$

مثال

$$۳/۱۴\ ,\ ۲\frac{۱}{۳}\ ,\ ۰/۴۸\ ,\ \frac{۷}{۱۵}\ ,\ \frac{۱}{۲}$$

اعداد رادیکالی که جذرکامل نباشند وعدد پی گویا نیستند .

$$\sqrt{۲}\ ,\ \sqrt{۱۰}\ ,\ \pi\ ,\ \sqrt{۲۰۰}$$

تذکر

مجموعهٔ اعداد گویا با نمایش اعضا نوشته نمی شود.

زیرا بین دو عدد گویا بی شمار عدد گویا وجود دارد .

نمایش اعداد گویا بین دو عدد گویا

برای نمایش اعداد گویا ی بین دو عدد گویا روش های زیر وجود دارد :

روش اول : صورتها را با هم و مخرج ها نیز با جمع می کنیم و این کار را ادامه می دهیم .

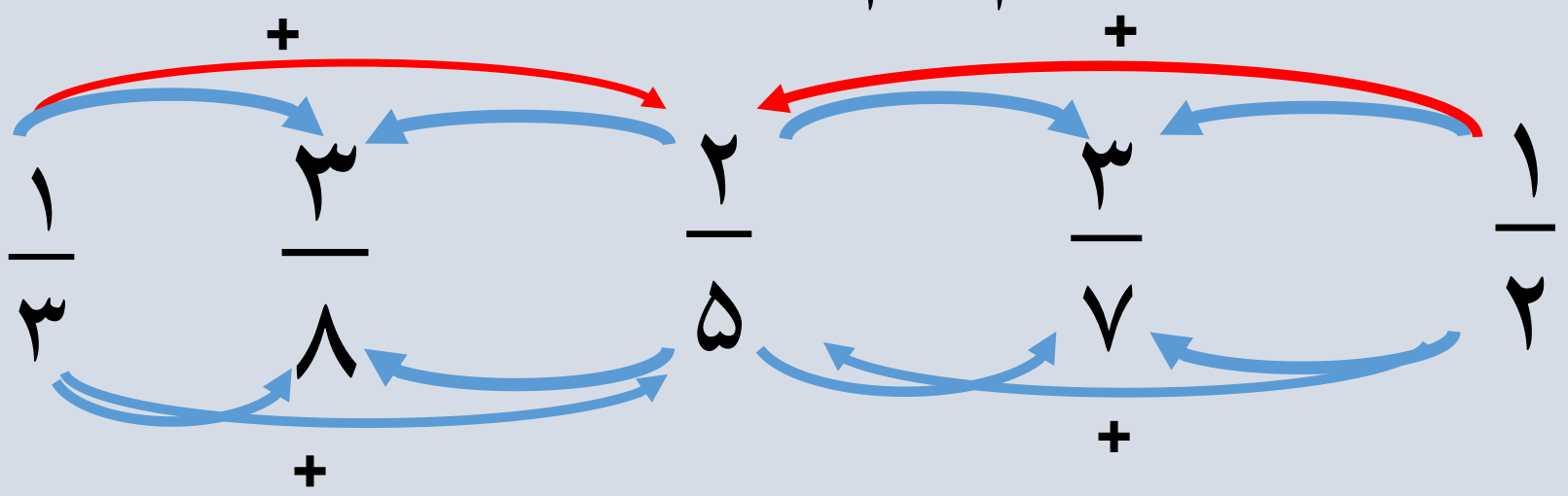
روش دوم : روش میانگین (به دست آوردن میانگین)

روش سوم : روش هم مخرج کردن کسرها

روش اول : در این روش صورت کسرها را با هم و مخرج آنها را نیز با هم جمع می کنیم .

مثال

بین دو عدد گویای $\frac{۱}{۳}$, $\frac{۱}{۲}$ سه عدد گویا بنویسید .



بنا بر این داریم :

$$\frac{۱}{۲} < \frac{۳}{۷} < \frac{۲}{۵} < \frac{۳}{۸} < \frac{۱}{۳}$$

روش دوم روش میانگین :

می دانیم میانگین دو عدد بین آنها قرار دارد از این تعریف برای نوشتن اعداد گویا بین دو عدد گویا استفاده می کنیم .

مثال

بین دو عدد گویای $\frac{2}{5}$ و $\frac{3}{4}$ سه عدد گویا بنویسید .

$$\frac{\frac{3}{4}+\frac{2}{5}}{2}=\frac{15+8}{20}=\frac{\frac{23}{20}}{\frac{2}{1}}=\frac{23}{40}$$

$$\frac{\frac{23}{40}+\frac{3}{4}}{2}=\frac{23+30}{40}=\frac{\frac{53}{40}}{\frac{2}{1}}=\frac{53}{80}$$

$$\frac{\frac{23}{40}+\frac{2}{5}}{2}=\frac{23+16}{40}=\frac{\frac{39}{40}}{\frac{2}{1}}=\frac{39}{80}$$

بنا بر این داریم :

$$\frac{32}{80}<\frac{39}{80}<\frac{46}{80}<\frac{53}{80}<\frac{60}{80}$$

$$\frac{2}{5}<\frac{39}{80}<\frac{23}{40}<\frac{53}{80}<\frac{3}{4}$$

روش سوم روش هم مخرج کردن : در این روش عملیات زیر را انجام می دهیم :

۱- ابتدا کسرها را هم مخرج می کنیم اگر بین صورتها عدد طبیعی وجود داشته باشد می نویسیم .

مثال

بین دو کسر $\frac{۲}{۵}$ و $\frac{۱}{۴}$ دو عدد گویا بنویسید .

$$\frac{۲}{۵} = \frac{۲\times۴}{۵\times۴} = \frac{۸}{۲۰} \qquad \frac{۱}{۴} = \frac{۱\times۵}{۴\times۵} = \frac{۵}{۲۰}$$

$$\frac{۵}{۲۰} < \frac{۶}{۲۰} < \frac{۷}{۲۰} < \frac{۸}{۲۰}$$

۲-بعد از هم مخرج کردن اگر بین صورت ها عدد طبیعی وجود نداشت صورت و مخرج کسرها را در یک واحد بیشتر از تعداد خواسته شده ضرب می کنیم تا اعدادحاصل نمایان شوند .

مثال

بین دو عدد گویای $\frac{۱}{۵}$, $\frac{۱}{۴}$ پنج عدد گویا بنویسید .

$$\frac{۱}{۴}=\frac{۱\times۵}{۴\times۵}=\frac{۵}{۲۰}$$

$$\frac{۱}{۵}=\frac{۱\times۴}{۵\times۴}=\frac{۴}{۲۰}$$

$$\frac{۵}{۲۰}=\frac{۵\times۶}{۲۰\times۶}=\frac{۳۰}{۱۲۰}$$

$$\frac{۴}{۲۰}=\frac{۴\times۶}{۲۰\times۶}=\frac{۲۴}{۱۲۰}$$

$$\frac{۲۴}{۱۲۰}<\frac{۲۵}{۱۲۰}<\frac{۲۶}{۱۲۰}<\frac{۲۷}{۱۲۰}<\frac{۲۸}{۱۲۰}<\frac{۲۹}{۱۲۰}<\frac{۳۰}{۱۲۰}$$

نمایش اعشاری اعداد گویا : برای نمایش اعداد گویا به شکل اعشاری ،ابتدا کسر را ساده کرده سپس صورت کسر را بر مخرج تقسیم می کنیم . در این صورت یکی از حالتهای زیر اتفاق می افتد .

الف) باقیمانده به صفر می رسد و آن را **مختوم** یا **تحقیقی** می نامیم . مانند :

$\frac{۱}{۸۰} = ۰/۰۱۲۵$ $\quad \frac{۳}{۸} = ۰/۳۷۵$ $\quad \frac{۲}{۵} = ۰/۴$

ب) باقیمانده به صفر نمی رسد ولی در خارج قسمت رقم های اعشاری تکراری به وجود می آید که به آن ارقام دورهٔ گردش می گوییم وآن عدد را **متناوب ساده** می نامیم . مانند :

$\frac{۵}{۱۱} = ۰/۴۵۴۵۴۵۴۵۴۵... = ۰/\overline{۴۵}$ $\quad \frac{۲}{۳} = ۰/۶۶۶۶۶... = ۰/\overline{۶}$

ج) باقیمانده به صفر نمی رسد و در خارج قسمت رقمهای اعشاری ثابت و تکراری به وجود می آید که آن را اعشاری متناوب مرکب می نامیم . مانند :

$\frac{۵}{۶} = ۰/۸۳۳۳۳۳۳۳... = ۰/۸\overline{۳}$ $\quad \frac{۳۰۹}{۹۹۰} = \frac{۱۰۳}{۳۳۰} = ۰/۳۱۲۱۲۱۲۱۲۱۲... = ۰/۳\overline{۱۲}$

تذکر

هر عددی را که نتوان به یکی از صورت های فوق نوشت یک عدد گنگ یا اصم می نامیم . مانند :

$\sqrt{۱۰}$ $\quad \sqrt{۲۴}$ $\quad ۰/۲۰۲۰۰۲۰۰۰۲...$

$۰/۱۰۲۰۳۰۴۰...$ $\quad \pi$ $\quad \frac{۵}{\sqrt{۲}}$

تذکر

تشخیص نوع عدد بدون انجام عمل تقسیم

ابتدا کسر را ساده کرده و مخرج را تجزیه می کنیم .

❖اگر شمارنده های اول مخرج فقط ۲ یا ۵ ویا ۲و۵ باشد عدد مختوم یا تحقیقی است .مانند :

$\frac{۳}{۵}$ $\qquad \frac{۱}{۲۰}=\frac{۱}{۲^{۲}\times ۵}$ $\qquad \frac{۳}{۵۰}=\frac{۳}{۲\times ۵^{۲}}$

❖اگر شمارنده های اول مخرج غیر از ۲ و ۵ باشد عدد متناوب ساده است مانند :

$\frac{۲}{۳}=۰/۶۶۶۶۶...=۰/\overline{۶}$ $\qquad \frac{۵}{۱۱}=۰/۴۵۴۵۴۵...=۰/\overline{۴۵}$

❖اگر شمارنده های مخرج هم شامل ۲و۵ و هم عدد اول دیگری باشد عدد متناوب مرکب است . مانند :

$\frac{۵}{۱۲}=\frac{۵}{۲^{۲}\times ۳}=۰/۴۱۶۶۶۶۶...=۰/۴۱\overline{۶}$ $\qquad \frac{۱}{۱۵}=\frac{۱}{۳\times ۵}=۰/۰۶۶۶۶۶...=۰/۰\overline{۶}$

۹۱) کسر تحویل ناپذیری که در مخرج آن تنها عامل‌های ۲ و ۵ وجود داشته باشد قابل تبدیل به کدام نوع عدد اعشاری است؟

الف) مختوم ✓ ب) متناوب ساده ج) متناوب مرکب د) اصم

۹۲) کدام کسر دارای نمایش اعشاری متناوب مرکب است؟

الف) $\frac{۷}{۲۵۰۰}$ ب) $\frac{۱}{۷}$ ج) $\frac{۲}{۵۵۰}$ ✓ د) $\frac{۳}{۱۲۷۱}$

۹۸) به ازای چه مقداری برای y، کسر مقابل مختوم خواهد شد؟ $\frac{۴۹}{۱۴^{۲}\times۲۰\times۶^{y+۱}}$

الف) ۱− ✓ ب) صفر ج) ۱ د) ۲

$$\frac{۷^{۲}}{۷^{۲}\times۲^{۲}\times۲^{۲}\times۵\times۲^{y+۱}\times۳^{y+۱}}$$

$$۳^{y+۱}=۱=۳^{۰}\rightarrow y+۱=۰\Rightarrow y=-۱$$

۱۰۲) در هر یک از کسرهای زیر صورت و مخرج نسبت به هم اولند. کدام‌یک از آنها نمایش اعشاری مختوم دارند؟

الف) $\frac{w}{۱۶۰}$ ✓ ب) $\frac{y}{۶۰}$ ج) $\frac{z}{۱۵}$ د) $\frac{x}{۲۲}$

$۱۶۰=۲^{۵}\times۵$ $۶۰=۲\times۳\times۵$ $۱۵=۳\times۵$ $۲۲=۲\times۱۱$

۱۰۳) اگر a عددی گنگ و b عددی گویا باشد کدام عبارت زیر حتماً درست است؟

الف) $a+b \in \mathbb{Q}'$ ✓

ب) $\frac{b}{a} \in \mathbb{Q}'$

ج) $ab^{۲} \in \mathbb{Q}'$

د) $ba^{۲} \in \mathbb{Q}'$

۱۲۲) کدام کسر بین $\frac{۱}{۲}$ و $\frac{۲}{۳}$ است؟

الف) $\frac{۱۷}{۲۴}$

ب) $\frac{۱}{۳}$

ج) $\frac{۱}{۴}$

د) $\frac{۷}{۱۲}$ ✓

۱۲۴) کدام‌یک از اعداد زیر، بین دو کسر $\frac{۱}{۲}$ و $\frac{۲}{۵}$ قرار **ندارد**؟

الف) $\frac{۳}{۷}$ ○ ب) $\frac{۹}{۲۰}$ ○ ج) ۰/۴۲۵ ○ د) ۰/۳ ✓

۱۲۶) چند عدد طبیعی کم‌تر از ۶۰ وجود دارد که اگر به‌جای a قرار گیرد، کسر $\frac{a}{۶۰}$ مختوم می‌شود؟

الف) ۴۰ ○ ب) ۱۹ ✓ ج) ۹ ○ د) ۶ ○

۳,۶,۹,۱۲,۱۵,۱۸,۲۱,۲۴,۲۷,۳۰,۳۳,۳۶,۳۹,۴۲,۴۵,۴۸,۵۱,۵۴,۵۷

۱۲۷) به ازای کدام مقدار m ، عبارت $\frac{\sqrt{۲}+۵}{\sqrt{۸}+m}$ عددی گویا است؟

الف) -۱۰ ○ ب) -۵ ○ ج) ۵ ○ د) ۱۰ ✓

$$\frac{\sqrt{۲}+۵}{۲\sqrt{۲}+m}=\frac{\sqrt{۲}+۵}{۲\sqrt{۲}+۱۰}=\frac{\sqrt{۲}+۵}{۲\left(\sqrt{۲}+۵\right)}=\frac{۱}{۲}$$

۱۲۸) حاصل عبارت $\frac{۱}{۱۳۲}+\cdots+\frac{۱}{۲۰}+\frac{۱}{۱۲}+\frac{۱}{۶}$ ، کدام است؟

الف) $\frac{۳}{۵}$ ○ ب) $\frac{۵}{۱۲}$ ✓ ج) $\frac{۳}{۱۲}$ ○ د) $\frac{۱}{۱۲}$ ○

$$\frac{۱}{۲\times۳}+\frac{۱}{۳\times۴}+\frac{۱}{۴\times۵}+\ldots+\frac{۱}{۱۱\times۱۲}=$$

$$\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۳}-\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۴}-\frac{۱}{۵}+\ldots+\frac{۱}{۱۱}-\frac{۱}{۱۲}=\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۱۲}=\frac{۶-۱}{۱۲}=\frac{۵}{۱۲}$$

۱۲۹) چند عدد گویا به‌صورت $\frac{x}{۱۰۰}$ بین $\frac{۲}{۳}$ و $\frac{۵}{۷}$ وجود دارد به طوری که x یک عدد طبیعی باشد؟

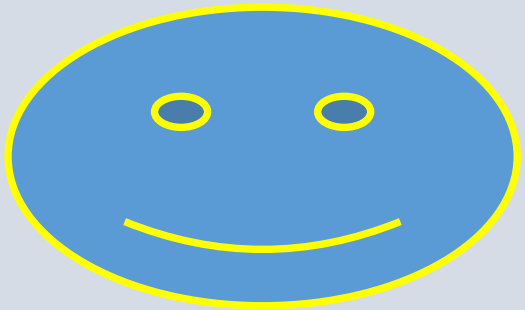
الف) ۱۱ ○ ب) ۷ ○ ج) ۵ ✓ د) بی‌شمار ○

$$\frac{۲}{۳} \quad , \quad \frac{x}{۱۰۰} \quad , \quad \frac{۵}{۷}$$

$$\frac{۱۴۰۰}{۲۱۰۰} < \frac{۲۱x}{۲۱۰۰} < \frac{۱۵۰۰}{۲۱۰۰}$$

$$۱۴۰۰ < ۲۱x < ۱۵۰۰ \Rightarrow \frac{۱۴۰۰}{۲۱} < x < \frac{۱۵۰۰}{۲۱} \Rightarrow ۶۶/۷ < x < ۷۱/۴$$

$$۶۷ \, , \, ۶۸ \, , \, ۶۹ \, , \, ۷۰ \, , \, ۷۱$$



درس دو م : عدد های حقیقی

اعداد گنگ : اعدادی که نتوان آنها را به صورت یک کسر متعارفی نوشت را اعداد گنگ (اصم) می نامیم . مجموعهٔ اعداد گنگ را با $\mathbb{Q}^c$, $\mathbb{Q}'$ نمایش می دهیم .

$$\mathbb{Q}' = \mathbb{Q}^c = \{\pi, e, \sqrt{۲}, \sqrt{۳}, \sqrt{۴}, \sqrt{۵}, \ldots\} = \{\sqrt{n} \mid n \text{ مجذور کامل نباشد}\}$$

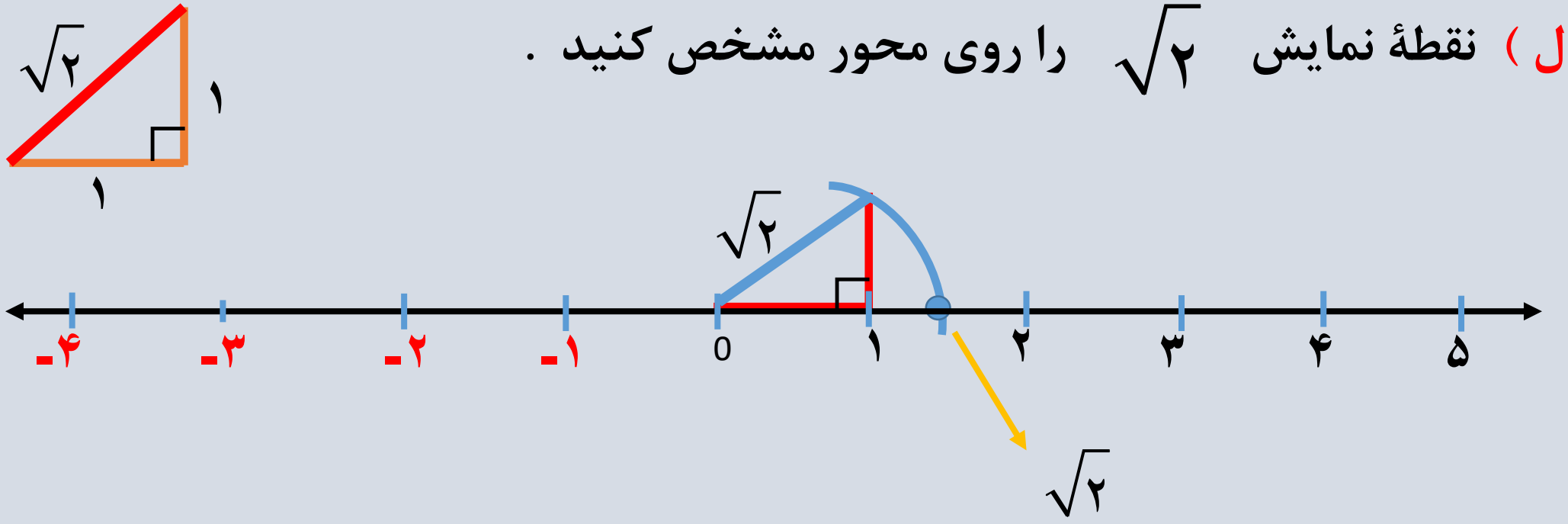
اجتماع مجموعه های اعداد گویا و گنگ را مجموعهٔ اعداد حقیقی می نامیم و با $\mathbb{R}$ نمایش می دهیم .

$$\mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}' = \mathbb{R}$$

نمایش اعداد گنگ روی محور

برای نمایش اعداد گنگ روی محور ابتدا با استفاده از رابطهٔ فیثاغورس پاره خطی به طول عدد داده شده می سازیم سپس آن را با استفاده از پرگار به روی محور منتقل می کنیم .

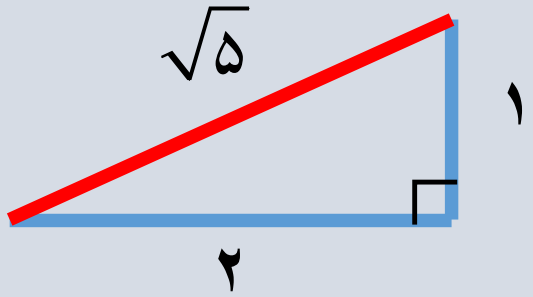
مثال) نقطهٔ نمایش $\sqrt{۲}$ را روی محور مشخص کنید .

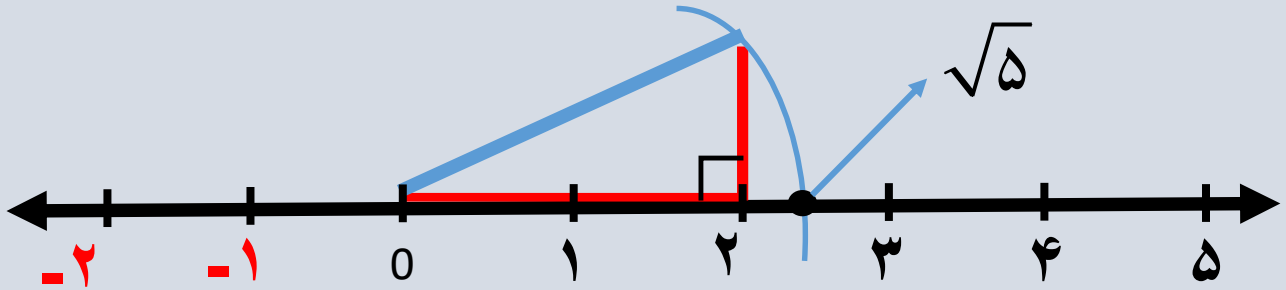


مثال

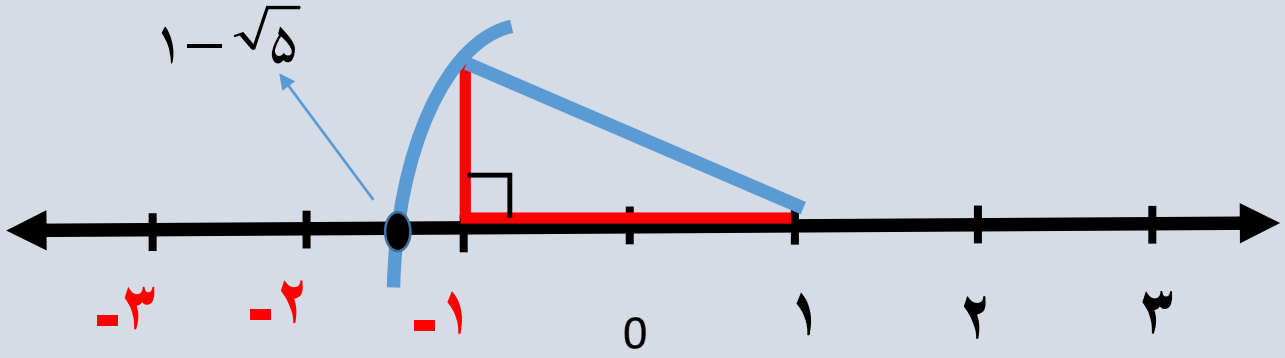
اعداد زیر را روی محور اعداد نمایش دهید .

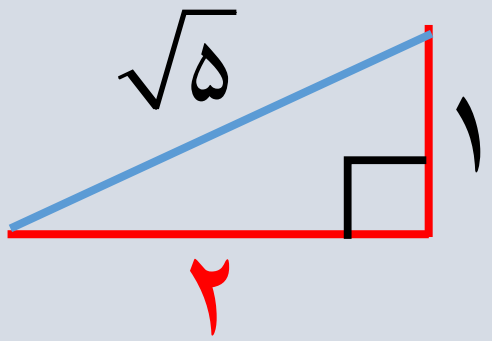
$\sqrt{5}$

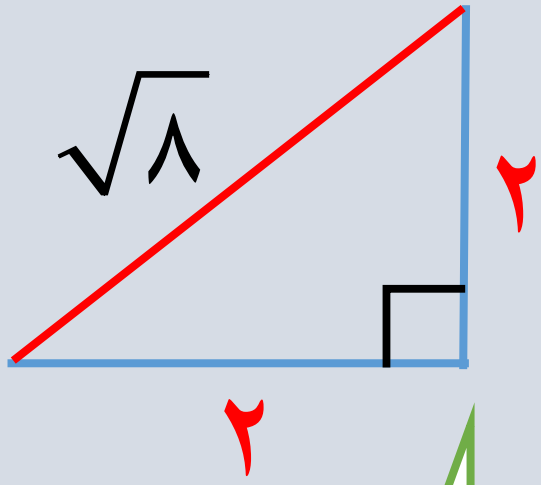


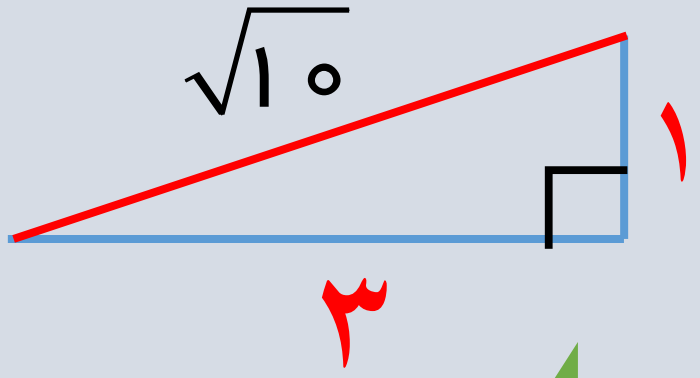


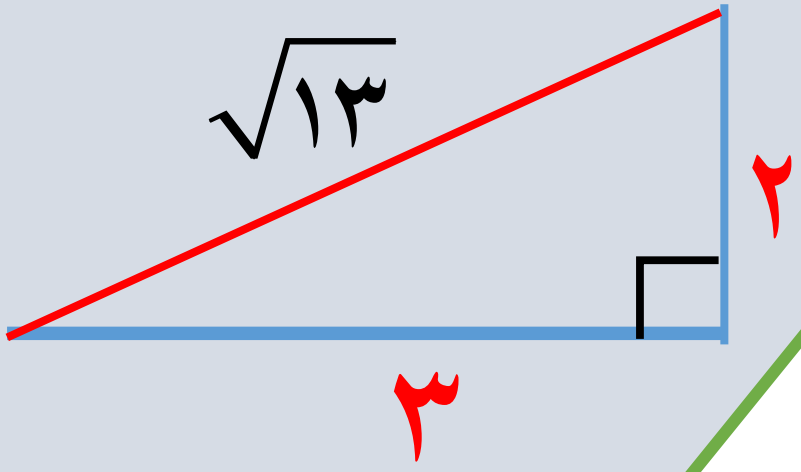
$1-\sqrt{5}$

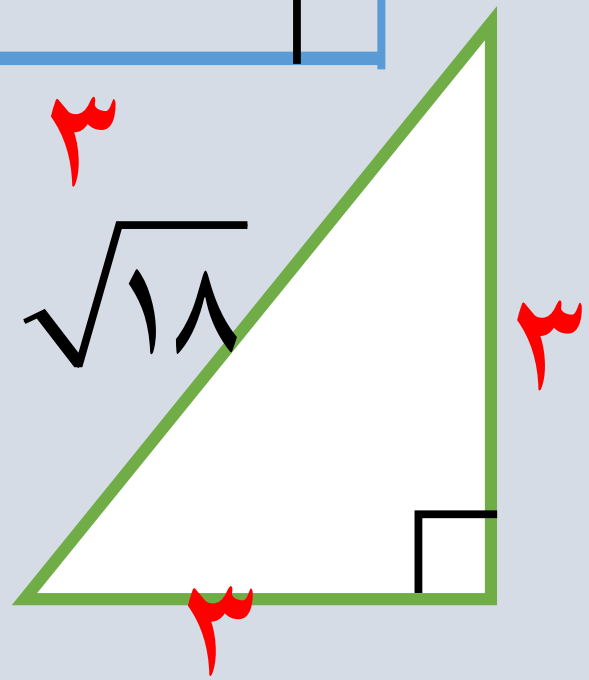


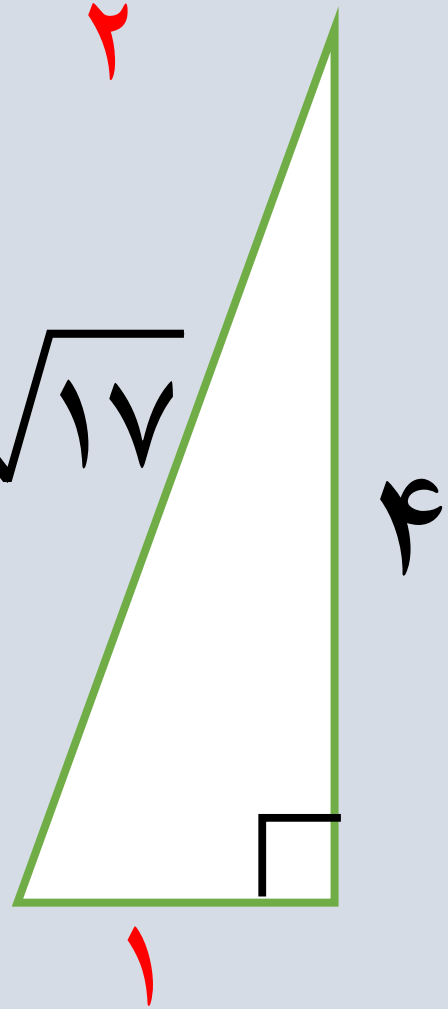

√٥
١
٢

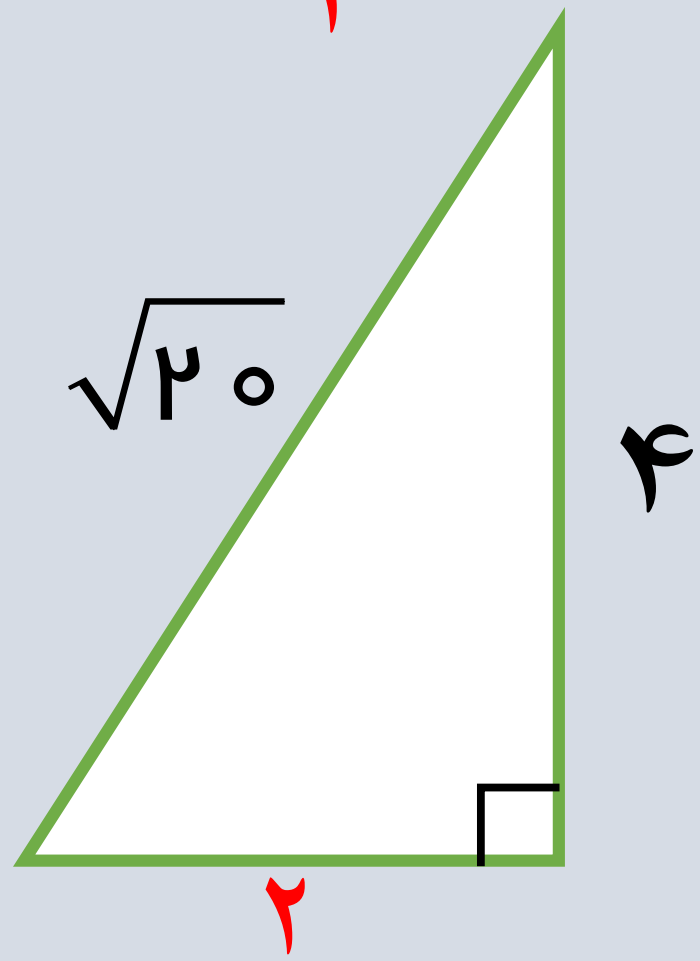

√٨
٢
٢


√١٠
١
٣

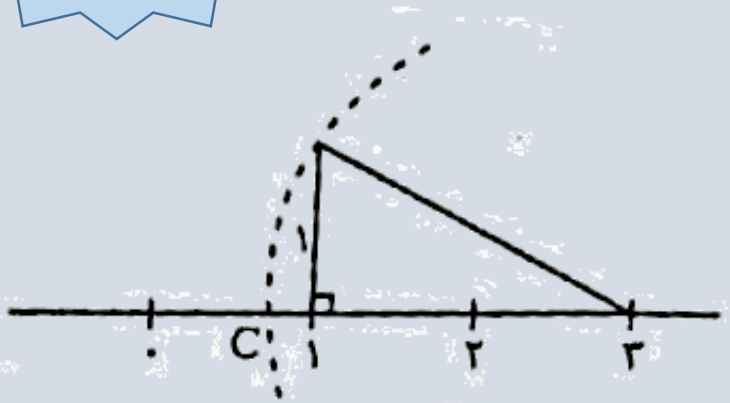

√١٣
٢
٣


√١٨
٣
٣


√١٧
٤
١


√٢٠
٤
٢

۱۳۲) در شکل روبه‌رو نقطه C کدام عدد حقیقی را نشان می‌دهد؟



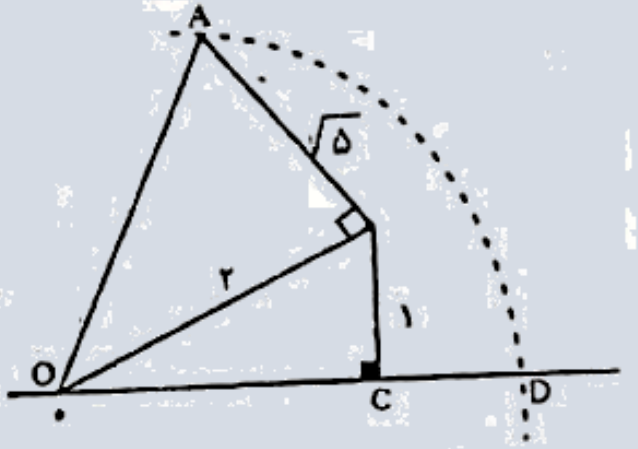
الف) $\sqrt{۵}$

ب) $\sqrt{۵}-۳$

ج) $\sqrt{۵}+۳$

د) $۳-\sqrt{۵}$ ✓

۱۳۳) اگر O مرکز دایره مقابل باشد، اندازه‌ی CD کدام است؟



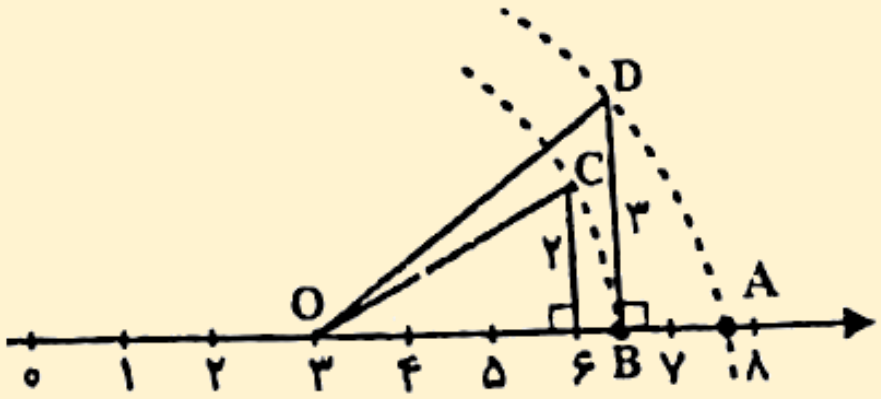
الف) $۳+\sqrt{۳}$

ب) $۳-\sqrt{۳}$ ✓

ج) $\sqrt{۵}$

د) ۳

۱۳۴) در محور زیر، نقطه‌ی A کدام عدد را نشان می‌دهد؟ (کمان‌ها به مرکز O و شعاع‌های OC و OD زده شده‌اند.)



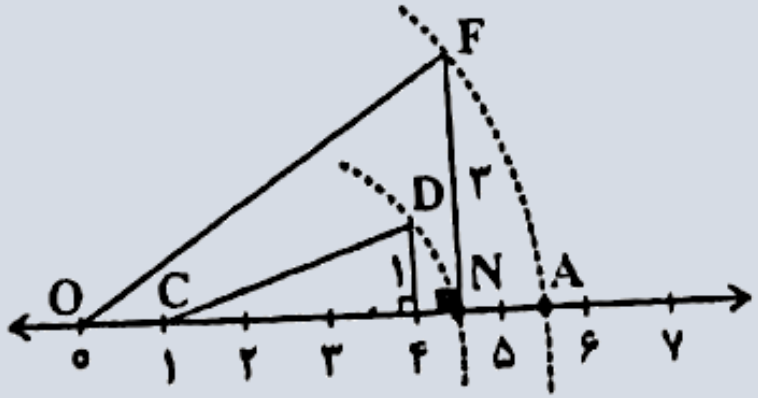
الف) $\sqrt{۵۶}$

ب) $۳ + \sqrt{۲۲}$

ج) $۳ + \sqrt{۱۳}$

د) $\sqrt{۵۷}$

۱۳۵) نقطه‌ی A ، نشان دهنده‌ی کدام نقطه روی محور اعداد حقیقی است؟(به مرکز C و شعاع CD و به مرکز O و شعاع OF کمان زده شده است.)



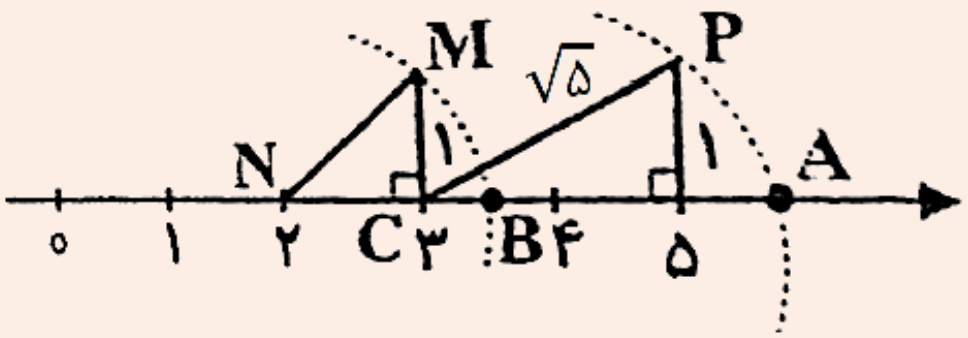
الف) $\sqrt{۲۶}$

ب) $\sqrt{۱+\sqrt{۱۰}}$

ج) $\sqrt{۱۰}$

د) $\sqrt{۲۰+۲\sqrt{۱۰}}$

۱۳۶) در شکل زیر، عدد نظیر $A + B$ کدام است؟ (B محل تلاقی کمان به مرکز N و شعاع MN و A محل تلاقی کمان به مرکز C و شعاع CP با محور می‌باشد.)



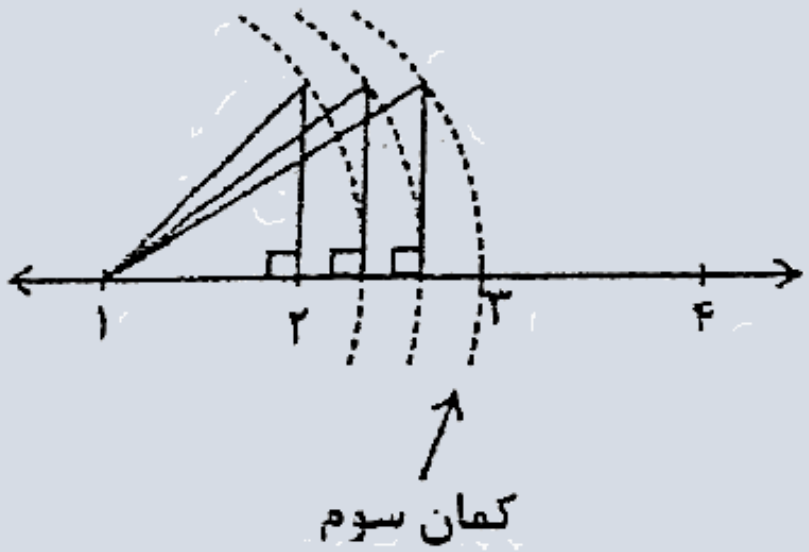
الف) $۵\sqrt{۵} + \sqrt{۲}$

ب) $۵ + \sqrt{۱۰}$

ج) ۵/۵

د) $۵ + \sqrt{۲} + \sqrt{۵}$ ✓

۱۳۷) اگر در شکل زیر ، با الگوی ثابت ، متوالیاً با مرکز یکسان کمان بزنیم ، دهمین کمان چه عددی را نشان می‌دهد؟ (طول پاره خط‌های عمودی یک واحد است.)



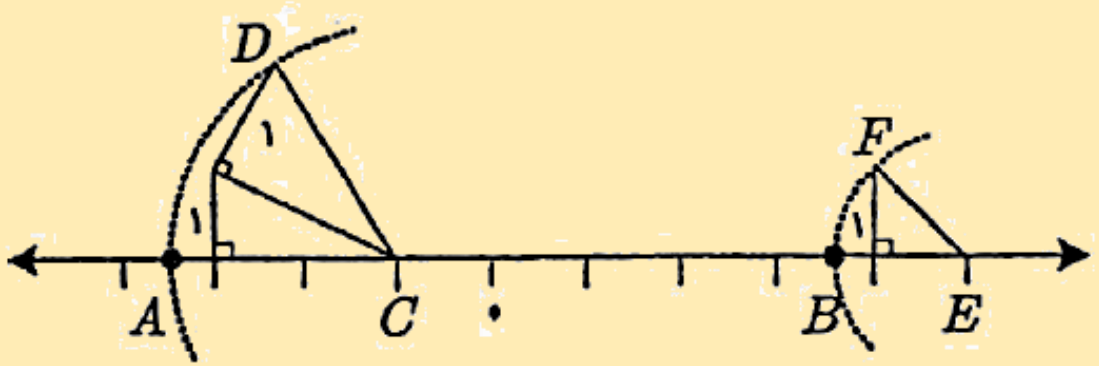
الف) $\sqrt{۱۰}$

ب) $۱ + \sqrt{۱۰}$

ج) ۱۰

د) $۱ + \sqrt{۱۱}$

۱۳۸) در شکل زیر نقطه‌ی A محل برخورد کمانی به مرکز C و شعاع CD و نقطه‌ی B محل برخورد کمانی به مرکز E و شعاع EF است. طول پاره خط AB چقدر است؟



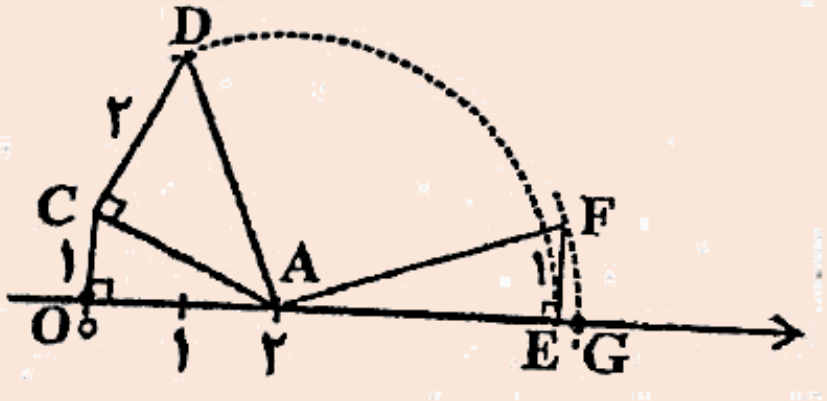
الف) $\sqrt{۱۲} - \sqrt{۲}$

ب) $۶ - \sqrt{۶} + \sqrt{۲}$

ج) $۶ + \sqrt{۶} - \sqrt{۲}$

د) $۶ - \sqrt{۲} - ۶$

۱۳۹) در شکل زیر،به مرکز A و به شعاع AD کمانی زده ایم تا محور را در نقطه E قطع کند.پس از مشخص شدن نقطه E نقطه F را به فاصله عمودی یک واحد دور تر از این نقطه مشخص کرده و به مرکز A و به شعاع AFکمانی زده ایم تا محور را در نقطه ی Gقطع کند.نقطه G نمایش چه عددی است؟(O مبدا مختصات است.)



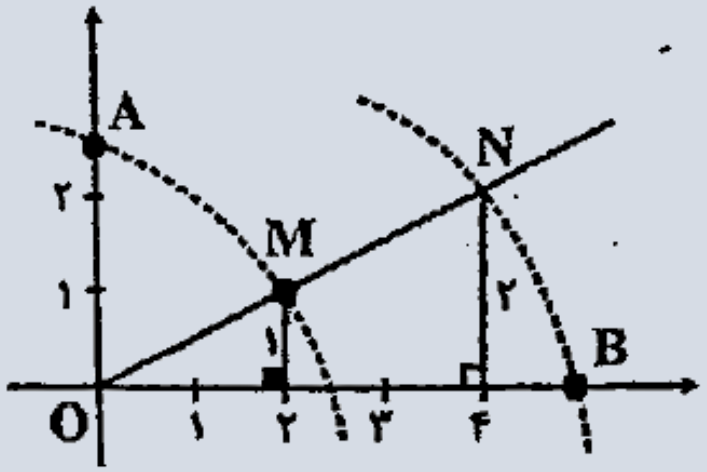
الف) $۳+\sqrt{۱۰}$

ب) $۱+\sqrt{۱۰}$

ج) $\sqrt{۱۰}$

د) $۲+\sqrt{۱۰}$ ✓

۱۴۰) در شکل زیر فاصله دو نقطه A و B از یکدیگر کدام است؟(کمان ها به مرکز مبدا مختصات رسم شده اند.)



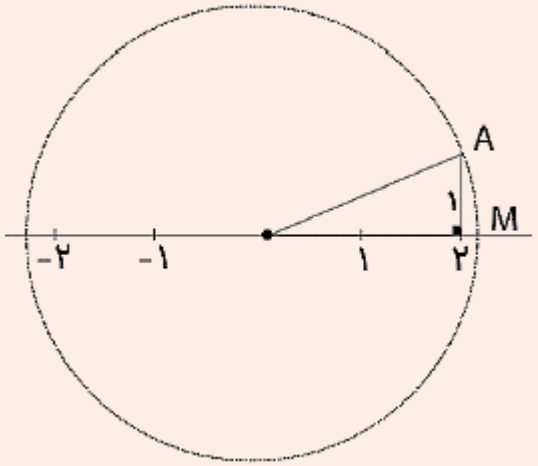
الف) $\sqrt{۲۰}$

ب) $\sqrt{۳۰}$

ج) $۴\sqrt{۲}$

د) ۵

۱۵۸) روی محور اعداد زیر، نقطه M چه عددی را نمایش می‌دهد؟



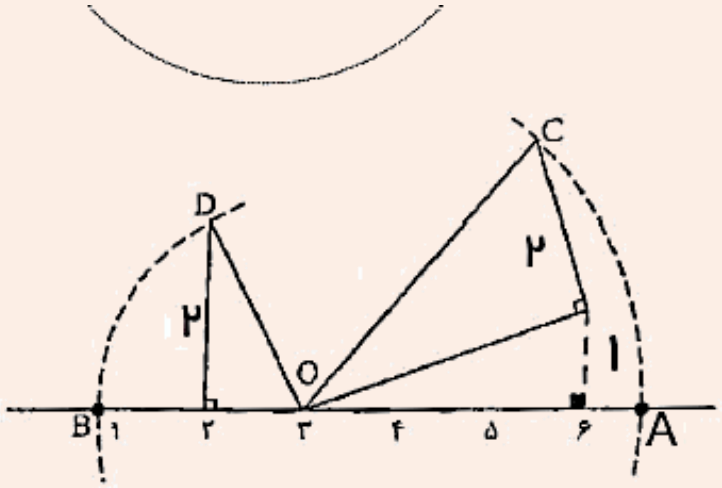
الف) $۲+\sqrt{۲}$ ○

ب) $\sqrt{۵}$ ✓

ج) $۱+\sqrt{۳}$ ○

د) $۲-\sqrt{۲}$ ○

۱۵۹) در شکل زیر دو کمان به مرکز O و شعاع‌های OD و OC داریم. اندازه‌ی $A-B$ کدام گزینه است؟



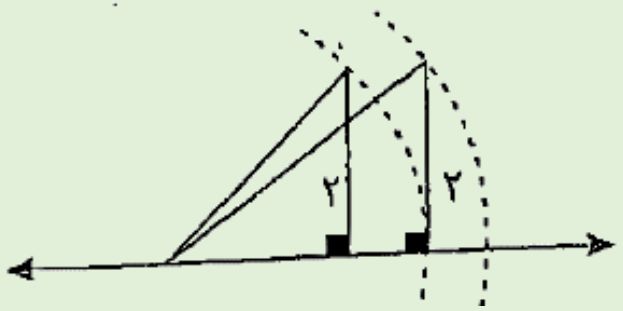
الف) $\sqrt{۱۴}+\sqrt{۵}$ ✓

ب) $\sqrt{۱۴}-\sqrt{۵}+۶$ ○

ج) $۳\left(\sqrt{۱۴}+\sqrt{۵}\right)$ ○

د) $\sqrt{۱۴}-\sqrt{۵}-۶$ ○

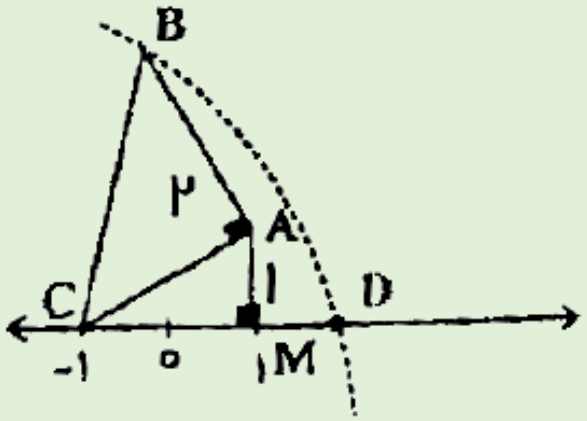
۱۶۰) در شکل مقابل دو کمان به مرکز مبدا رسم شده است. محل برخورد کمان بزرگ‌تر با محور چه عددی می‌باشد؟



الف) $\sqrt{۸}$ ○ ب) $\sqrt{۱۰}$ ○

ج) $\sqrt{۱۱}$ ○ د) $\sqrt{۱۲}$ ✓

۱۶۱) در شکل زیر طول نقطه D کدام است؟ (کمان دایره به مرکز C و شعاع BC رسم شده است)



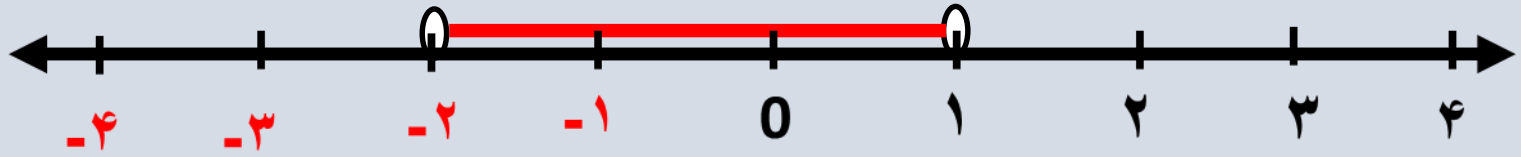
الف) $-۱+\sqrt{۷}$ ○ ب) ۳ ○

ج) ۲ ✓ د) ۴ ○

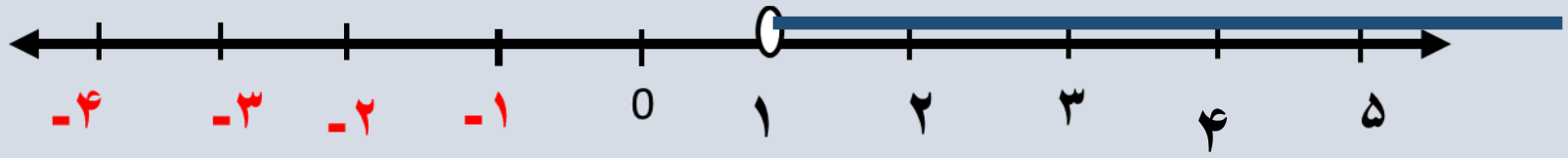
نمایش اعداد حقیقی روی محور

مجموعه های زیر را روی محور نمایش دهید.

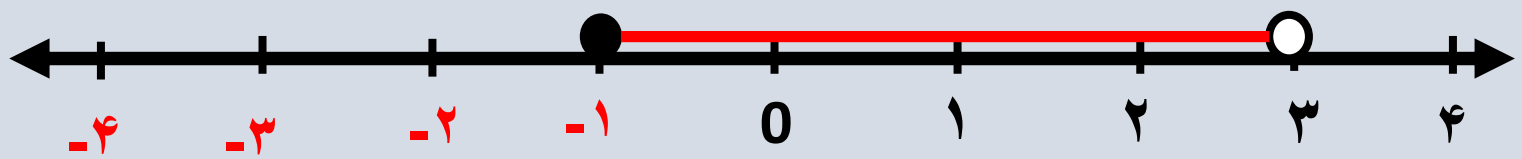
$$A=\{x\in\mathbb{R}\,|\,-۲<x<۱\}$$



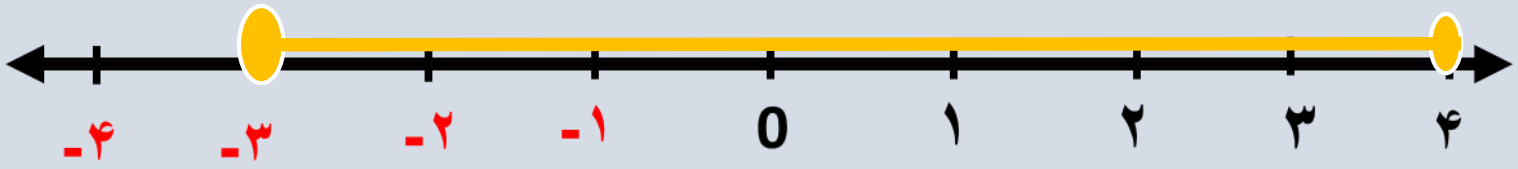
$$B=\{x\in\mathbb{R}\,|\,۱<x\}$$



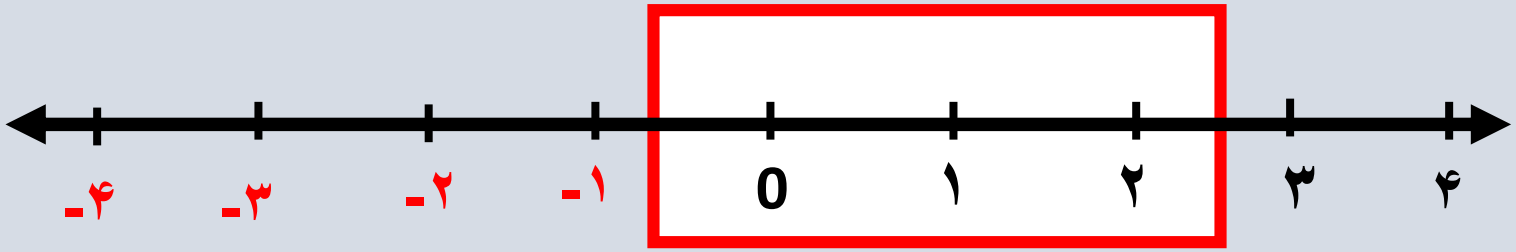
$$C=\{x\in\mathbb{R}\,|\,-۱\le x<۳\}$$



$$D=\left\{x\in\mathbb{R}\middle|-۳\leq x\leq ۴\right\}$$



$$E=\left\{x\middle|x\in\mathbb{Z},-۱<x<۳\right\}$$



۱) کدام عدد زیر اصم(گنگ) است؟

الف) ... ۱/۳۳ ○ ب) ... ۰/۳۲۱۲۱۲۱ ○ ج) ... ۰/۲۴۲۴۲۴ ○ د) ... ۰/۲۵۳۴۷۲ ✓

۸) کدام گزینه نادرست است؟

الف) $۰/۷۵۷۷۵۷۲۷۵ \ldots \in \mathbb{Q}'$ ○ ب) $۰/\overline{۷۵} \in \mathbb{Q}$ ○

ج) $۰ \in \mathbb{Q}$ ○ د) $\sqrt{۰/۳۶} \in \mathbb{Q}'$ ✓

۹) اگر $A = ۰/\overline{۲۵۲}$ ، عدد $\frac{۱}{A-۰/۲۵}$ کدام است؟

الف) ۴۴۱ ○ ب) ۴۴۲ ○ ج) ۴۴۳ ○ د) ۴۴۴ ○

۱۰) اگر $A = ۰/۵\overline{۲۴۳}$ باشد آنگاه عدد $\frac{۹}{۱۰A-۵}$ کدام است؟

الف) ۲۷ ○ ب) ۳۷ ○ ج) ۳۸ ○ د) ۳۹ ○

۱۱) اگر $\frac{۵۲}{۱۱} = ۴/\overline{۷۲}$ باشد a کدام است؟

الف) ۶ ○ ب) ۷ ✓ ج) ۸ ○ د) ۹ ○

$\frac{۵۲}{۱۱} = ۴/۷۲۷۲۷۲۷۲... \rightarrow a = ۷$

۱۲) حاصل عبارت مقابل برابر با کدام گزینه است؟

$$\frac{۲}{۳\times۸} + \frac{۲}{۸\times۱۳} + \frac{۲}{۱۳\times۱۸} + \frac{۲}{۱۸\times۲۳}$$

الف) ۱ ○ ب) $\frac{۱}{۲۳}$ ○ ج) $\frac{۸}{۶۹}$ ✓ د) $\frac{۱}{۱۸}$ ○

$$\frac{۵}{۵}\left(\frac{۲}{۳\times۸} + \frac{۲}{۸\times۱۳} + \frac{۲}{۱۳\times۱۸} + \frac{۲}{۱۸\times۲۳}\right) = \frac{۲}{۵}\left(\frac{۱}{۳} - \frac{۱}{۸} + \frac{۱}{۸} - \frac{۱}{۱۳} + \frac{۱}{۱۳} - \frac{۱}{۱۸} + \frac{۱}{۱۸} - \frac{۱}{۲۳}\right) =$$

$$\frac{۲}{۵}\left(\frac{۱}{۳} - \frac{۱}{۲۳}\right) = \frac{۲}{۵} \times \frac{۲۰}{۶۹} = \frac{۸}{۶۹}$$

۱۳) به ازای چند مقدار صحیح n ، عدد $\frac{۶}{n+۱}$ نیز عددی صحیح است؟

الف) ۴ ○ ب) ۶ ○ ج) ۸ ○ د) ۷ ✓

$$(n+۱)\in\{-۶,-۳,-۲,-۱,۱,۲,۳,۶\}\rightarrow n=-۷,-۴,-۳,۰,۱,۲,۵$$

۱۴) کسر متعارفی مولد عدد اعشاری $A = ۱/۳\overline{۱} + ۰/\overline{۲}$ کدام است؟

الف) $\frac{۱۵۳}{۹۹}$ ○ ب) $\frac{۱۵۲}{۹۹}$ ✓ ج) $\frac{۱۵۲}{۹۰}$ ○ د) $\frac{۱۵۳}{۹۰}$ ○

$$\frac{۱۳۰}{۹۹}+\frac{۲}{۹}=\frac{۱۳۰+۲۲}{۹۹}=\frac{۱۵۲}{۹۹}$$

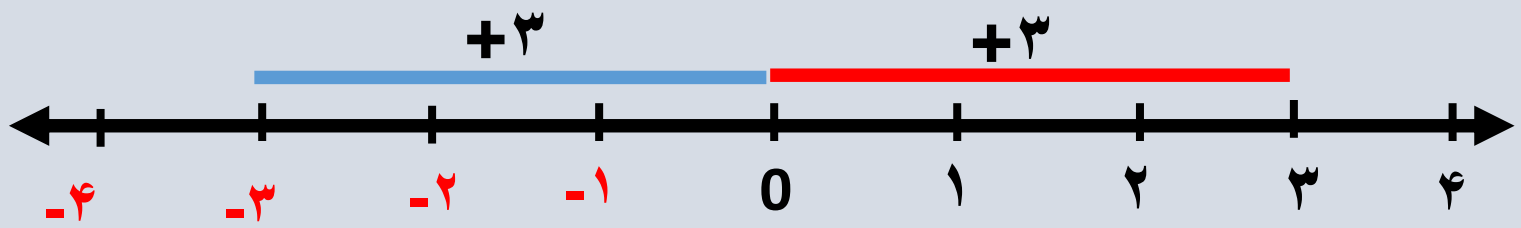
به نام خدا

فصل دوم – درس سوم

قدر مطلق و محاسبهٔ تقریبی

تهیه و تنظیم : گودرزی

قدر مطلق



$|a|$ فاصلهٔ نقطه نمایش عدد a تا مبدا را قدر مطلق a می نامیم و با علامت نمایش میدهیم و قدر مطلق a می خوانیم .

با توجه به محور وتعریف بالا داریم :

$$|+۳| = |-۳| = ۳$$

مثال

$|+۱۰| = +۱۰$

$|-۲۰| = +۲۰$

$-|+۱۵| = -۱۵$

$|-۲| = +۲$

$|+۱۰۰| = +۱۰۰$

$-|-۱۰| = -۱۰$

به طور کلی اگر x یک عدد حقیقی باشد داریم :

$$\begin{cases} x > 0 \Rightarrow |x| = x \xrightarrow{\text{مثال}} |+15| = 15 \\ x = 0 \Rightarrow |0| = 0 \xrightarrow{\text{مثال}} |10-10| = |0| = 0 \\ x < 0 \Rightarrow |x| = -x \xrightarrow{\text{مثال}} |-8| = -(-8) = 8 \end{cases}$$

تذکر : اگر درون قدر مطلق اعمال محاسباتی وجود داشته باشد ابتدا باید آن عملیات را انجام داده و سپس قدر مطلق مقدار حاصل را به دست آوریم .

محاسبات زیر را انجام دهید .

مثال

$$|-۵+۱۵-۲۶| = |-۱۶| = +۱۶$$

$$|۱۰۰-۲۰۰-۳۰۰-(-۴۰۰)| = |۰| = ۰$$

$$|-۶-(-۱۲)+(-۹)-(-۱۱)| = |-۶+۱۲-۹+۱۱| =$$

$$|+۸| = ۸$$

- اگر $a=-۲\ ,\ b=۳\ ,\ c=-۷$ باشد حاصل عبارات زیر را به دست آورید .

$$\left|۲a-۳b+c\right|=\left|۲(-۲)-۳(۳)+(-۷)\right|=\left|-۴-۹-۷\right|=\left|-۲۰\right|=۲۰$$

$$\left|\frac{۱}{۴}a-\frac{۱}{۱۲}b\right|-\left|۱-۳c\right|=\left|\frac{۱}{۴}(-۲)-\frac{۱}{۱۲}\times ۳\right|-\left|۱-۳(-۷)\right|=\left|-\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۴}\right|-\left|۲۲\right|=$$

$$\left|-\frac{۳}{۴}\right|-۲۲=\frac{۳}{۴}-۲۲=\frac{۳-۸۸}{۴}=-\frac{۸۵}{۴}=-۲۱\frac{۱}{۴}$$

نکته ها

قدرمطلق حاصل‌ضرب دو عدد، برابر حاصل‌ضرب قدرمطلق آن‌ها است. به زبان ریاضی یعنی اگر x و y دو عدد حقیقی باشند داریم:

$$|x \cdot y| = |x||y|$$

قدرمطلق تقسیم دو عدد، برابر حاصل تقسیم قدرمطلق آن‌ها است. یعنی برای x و y حقیقی $(y \neq 0)$ داریم: $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$

در حالت کلی برای هردو عدد a و b رابطهٔ $|a+b| \leq |a| + |b|$ برقرار می‌باشد.

برای بعضی محاسبه‌ها بهتر است مقدار تقریبی عددهای زیر را که تا یك رقم اعشار نوشته شده، به ذهن بسپاریم:

$\sqrt{۸} \simeq ۲/۸$ و $\sqrt{۷} \simeq ۲/۶$ و $\sqrt{۶} \simeq ۲/۴$ و $\sqrt{۵} \simeq ۲/۲$ و $\sqrt{۳} \simeq ۱/۷$ و $\sqrt{۲} \simeq ۱/۴$

در حالت کلی برای هر عدد حقیقی x داریم: $|x| = |-x|$

چند تذکر:

۱- عدد a مثبت می‌باشد، یعنی $a > 0$

۲- عدد a منفی می‌باشد، یعنی $a < 0$

۳- عدد a نامنفی می‌باشد، یعنی $a \geq 0$

۴- عدد a نامثبت می‌باشد، یعنی $a \leq 0$

آیا می‌توان گفت به‌ازای هر مقدار x عبارت $\sqrt{x^2} = x$ درست است؟ **خیر**

$$x = -5 \Rightarrow \sqrt{x^2} = \sqrt{(-5)^2} = \sqrt{25} = 5 \neq x$$

برای هر مقدار حقیقی x داریم : $\sqrt{x^2} = |x|$

$$\sqrt{(-6)^2} = |-6| = +6 \qquad \sqrt{(6-15)^2} = \sqrt{(-9)^2} = |-9| = +9$$

مثال

حاصل عبارت $\sqrt{(3-\sqrt{8})^2}$ را حساب کنید.

$$\sqrt{8}<3 \Rightarrow 3-\sqrt{8}>0 \Rightarrow \sqrt{(3-\sqrt{8})^2}=|3-\sqrt{8}|=3-\sqrt{8}$$

حاصل عبارت $\sqrt{(3-\sqrt{10})^2}$ را حساب کنید.

$$\sqrt{10}>3 \Rightarrow 3-\sqrt{10}<0 \Rightarrow \sqrt{(3-\sqrt{10})^2}=|3-\sqrt{10}|=\sqrt{10}-3$$

نکته : اگر k عددی مثبت باشد، داریم: $|x| = k \Rightarrow x = \pm k$

مثال

$$|x - ۵| = ۱۲ \Rightarrow \begin{cases} x - ۵ = ۱۲ \\ x - ۵ = -۱۲ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = ۱۷ \\ x = -۷ \end{cases}$$

$$|-۳x + ۴| = ۸ \Rightarrow \begin{cases} -۳x + ۴ = ۸ \\ -۳x + ۴ = -۸ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -۳x = ۴ \Rightarrow x = -\frac{۴}{۳} \\ -۳x = -۱۲ \Rightarrow x = ۴ \end{cases}$$

۲) حاصل عبارت $|\pi - ۱| - |\pi - ۲|$ کدام گزینه است؟

الف) $\pi + ۱-$ ○ ب) $۱-$ ○ ج) $۳ - ۲\pi$ ○ د) ۱ ○

۳) اگر $a = \frac{۱}{۲}$ ، $b = \sqrt{۵}$ ، $c = -۴$ باشند، حاصل عبارت $|-a + b - c|$ کدام گزینه است؟

الف) $\sqrt{۵} - \frac{۹}{۲}$ ○ ب) $\sqrt{۵} - \frac{۷}{۲}$ ○ ج) $\sqrt{۵} + \frac{۷}{۲}$ ○ د) $\sqrt{۵} + \frac{۹}{۲}$ ○

۴) حاصل عبارت $\frac{|\sqrt{۳}-\pi|+|۱-\sqrt{۳}|-|\sqrt{۲}-\pi|}{۲-۲\sqrt{۲}}$ کدام گزینه است؟

الف) ۱ ○ ب) $\frac{۱}{۲}$ ○ ج) -۱ ○ د) $-\frac{۱}{۲}$ ○

۵) حاصل عبارت $\left|-|۵-\pi|+|\pi-۳|\right|$ برابر است با

الف) $۸+۲\pi$ ○ ب) $۸-۲\pi$ ○ ج) ۸ ○ د) ۲ ○

۶) حاصل عبارت $\sqrt{(۱-\sqrt{۵})^{۲}}-\sqrt{(\sqrt{۲}-\sqrt{۵})^{۲}}$ کدام گزینه است؟

الف) $\sqrt{۲}-۲\sqrt{۵}$ ○ ب) $۱-\sqrt{۵}$ ○ ج) $\sqrt{۲}-۱$ ○ د) $۲\sqrt{۵}$ ○

۷) کدام x در رابطه‌ی $|x-۲|+۵=۲$ صدق می‌کند؟

الف) ۱− ○ ب) ۱− و ۵ ○ ج) ۵ ○ د) برای x مقداری وجود ندارد ✓

$$|x-۲|=۲-۵=-۳\Rightarrow|x-۲|=-۳$$

حاصل قدرمطلق هرگز منفی نمی شود .

۱۸) اگر $x<-۲$ باشد، حاصل عبارت زیر را برحسب x کدام گزینه است؟

$$\sqrt{(x+۲)^۲}-\sqrt{x^۲}+\sqrt[۳]{(۱+x)^۲}$$

الف) $-۵+x$ ○ ب) $-۵+۳x$ ○ ج) $-۵-۳x$ ✓ د) $-x+۵$ ○

$$|x+۲|-|x|+۳|۱+x|=-x-۲-(-x)+۳(-۱-x)=-۲-۳-۳x=-۳x-۵$$

۲۱) اگر $a = ۲$ و $b = -\frac{۱}{۳}$ و $c = \sqrt{۷}$ باشد آنگاه حاصل $|a - ۲b - c|$ برابر است با

الف) $\sqrt{۷} - \frac{۳}{۴}$ ○ ب) $\sqrt{۷} - \frac{۴}{۳}$ ○ ج) $\sqrt{۷} - \frac{۸}{۳}$ ○ د) $\frac{۸}{۳} - \sqrt{۷}$ ○

۵۶) اگر $a < ۰$ و $b < ۰$ باشد، کدام عبارت همواره درست است؟

الف) $|a + b| = -a + b$ ○ ب) $|a + b| = a - b$ ○

ج) $|a + b| = a + b$ ○ د) $|a + b| = -(a + b)$ ○

۳۱) اگر $a = ۰/۷۵$ و $b = \frac{۱}{۲}$ و $c = ۱\frac{۱}{۳}$ باشند حاصل عبارت زیر را تعیین کنید.

$$|a - ۲b| + |۲c - ۲a - ۳b| =$$

الف) $\frac{۷}{۱۲}$ ○ ب) $\frac{۱۲}{۷}$ ○ ج) $\frac{۱}{۱۲}$ ○ د) $\frac{۵}{۱۲}$ ○

صفحهٔ ۶۲ جزوه

۳۲) مجموع ریشه های معادله‌ی $|۳x + ۱| = ۲$ کدام است؟

الف) $\frac{۱}{۳}$ ○ ب) $\frac{-۲}{۳}$ ○ ج) $\frac{۴}{۳}$ ○ د) $\frac{-۴}{۳}$ ○

۳۳) اگر $-۵ < x < ۰$ باشد.حاصل $|x| - |x + ۵|$ برابر است با

الف) ۵ ○ ب) $۲x = ۵$ ○ ج) -۵ ○ د) $-۲x - ۵$ ○

۳۴) حاصل $|\sqrt{۵}+۳-|-۳|$ کدام است؟

الف) $-۹-۳\sqrt{۵}$ ○ ب) $۹+۳\sqrt{۵}$ ○ ج) $۹-۳\sqrt{۵}$ ○ د) $۹-۳\sqrt{۵}$ ○

۳۵) اگر $x<۲$ باشد حاصل $۳x+۲|x-۲|-۱$ کدام است؟

الف) $-x-۳$ ○ ب) $۵x-۵$ ○ ج) $x-۳$ ○ د) $x+۳$ ○

۳۶) حاصل $\sqrt{(2-\sqrt{5})^2}-\sqrt{(3-\sqrt{5})^2}$ کدام است؟

الف) $5-2\sqrt{5}$ ○ ب) $-1-2\sqrt{5}$ ○ ج) -1 ○ د) $5+2\sqrt{5}$ ○

۳۹) اگر $-3 < a < 4$ باشد حاصل $|a+3|+|a-4|$ کدام است؟

الف) ۷ ○ ب) -4 ○ ج) $2a-1$ ○ د) $-2a+1$ ○